MAT206 DİFERANSİYEL DENKLEMLER-II FİNAL SORULARI-CEVAPLARI

01.06.2020

1- y''+y=cotx denklemin çözümü için verilenlerden hangileri doğrudur?

I. $y_h = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x}$

II. $T = \{\sin x, \cos x\}$ temel çözüm kümesidir

III. $y_ö = A\cot x + B\tan x$ şeklinde aranır

IV. $y_ö$ sabitin değişimi yöntemi ile aranır

A) II-III

B) II-IV

C) I-III

D) I-IV

E) III-IV

Cevap B- $\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm i$ $y_h = c_1 \cos x + c_2 \sin x$ olup $\{\sin x, \cos x\}$ lineer bağımsız çözümler yani temel çözüm kümesidir, sağ taraftaki fonksiyon için sadece sabitin değişimi ile çözüm aranabilir.

2- Verilen ifade hangi diferansiyel denklemin genel çözümüdür?

$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 e^{-x} + c_5 e^{2x}$

A) $y^{(5)} + y^{(4)} + 2y''' = 0$

B) $y^{(5)} + y^{(4)} + y''' = 0$

C) $2y^{(5)} - y^{(4)} + 2y''' = 0$

D) $y^{(4)} - 2y''' - 3y' = 0$

E) $y^{(5)} - y^{(4)} - 2y''' = 0$

Cevap E- 5 keyfi sabit olduğundan 5. mertebeden denklem olmalı, $\{1, x, x^2\}$ 0 ın 3 katlı kök olmasından gelen çözümler yani λ^3 çarpan, -1 kök olduğundan $\lambda + 1$ çarpan, 2 kök olduğundan $\lambda - 2$ çarpan o halde

$$\lambda^3(\lambda+1)(\lambda-2) = 0 \Rightarrow \lambda^3(\lambda^2 - \lambda - 2) = 0 \Rightarrow \lambda^5 - \lambda^4 - 2\lambda^3 = 0 \Rightarrow y^{(5)} - y^{(4)} - 2y^{(3)} = 0$$

bulunur.

3- Aşağıdaki denklemin çözümü nedir?

$y^{(4)} - y = 0$

A) $y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3$

B) $y = e^{x}(c_1 + c_2 x) + e^{-x}(c_3 + c_4 x)$

C) $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{x} + c_3 \cos x + c_4 \sin x$

D) $y = c_1 + c_2 x + c_3 \cos x + c_4 \sin x$

E) $y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x$

Cevap C- $\lambda^4-1=0\Rightarrow(\lambda^2-1)(\lambda^2+1)=0\Rightarrow(\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-i)(\lambda+i)=0$ kökler 1, -1, i,-i olup genel çözüm C şıkkı olur.

4- Temel çözüm kümesi verilen diferansiyel denklem hangisidir?

$T=\{1,x,e^x\}$

A) $y'''-y''=0$

B) $y'''+y''=0$

C) $y'''-y''-y=0$

D) $2y'''-y''=0$

E) $y'''+2y''=0$

Cevap A- 1 ve x ten ötürü e^{0x} çözüm yani $\lambda=0$ katlı kök olup λ^2 çarpan, e^x ten ötürü 1 kök olup $\lambda-1$ çarpan buna göre de $\lambda^2(\lambda-1)=0\Rightarrow(\lambda^3-\lambda^2)=0\Rightarrow y'''-y''=0$ bulunur

5- $y''-5y'+4y=0$ denkleminin y(0)=5, y'(0)=-4 koşulunu sağlayan çözümü aşağıdakilerden hangisidir?

A) $y=5e^x$

B) $y=-4e^{4x}$

C) $y=6e^x-e^{4x}$

D) $y=8e^x-3e^{4x}$

E) $y=e^{-x}+4e^{4x}$

Cevap D- $\lambda^2-5\lambda+4=0\Rightarrow(\lambda-4)(\lambda-1)=0\Rightarrow y_h=c_1e^{4x}+c_2e^x$ olur.

$$\left.\begin{array}{ll} y(0)=5 \ için & c_1+c_2=5 \\ y'(0)=-4 \ için & c_1+4c_2=-4 \end{array}\right\} c_1=8,\ c_2=-3 \ için \ y=8e^x-3e^{4x}$$ bulunur

6- Verilen denklemin çözümü için hangileri doğrudur?

$x^2y'''+xy''+y'=0$

I. $y'=u$ dönüşümü ile denklemin mertebesi düşürülebilir

II. $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ seri çözümü aranabilir

III. $x=e^t$ dönüşümü ile denklem sabit katsayılı denkleme indirgenebilir

IV. $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+r}$ seri çözümü aranabilir

A) I-II-III

B) I-III-IV

C) II-III

D) III-IV

E) I-II-III-IV

Cevap B- *Verilen denklem 3. mertebeden denklemdir. $y' = u \; için \; y'' = u', \quad y''' = u''$ olup denklemde yazılırsalar $x^2 u'' + xu' + u = 0$ şeklinde 2.mertebeden denklem elde edilir.

* Denklem düzenlenirse $y''' + \frac{1}{x} y'' + \frac{1}{x^2} y' = 0$ olup $\left. \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0} x \frac{1}{x} = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0} x^2 \frac{1}{x^2} = 1 \end{array} \right\}$ sonlu limit olduğu için $x_0 = 0$ düzgün singüler noktadır, bu durumda Frobenius seri çözümü aranır.

*Denklem x ile çarpılırsa Cauchy-Euler denklemi olup $x = e^t$ dönüşümü ile sabit katsayılı denkleme indirgenir.

7- Verilen denklemin homojen kısmının bir çözümü y=x ise u=u(x) olmak üzere y=xu dönüşümünden sonra elde edilen denklem aşağıdakilerden hangisidir?

$x^2 y'' - 2xy' + 2y = x^2$

A) $u'' - u = 2$

B) $xu'' + 4u' = x$

C) $u'' = 2/x$

D) $xu'' + 4u' = 1$

E) $xu'' = 1$

Cevap E - $y = xu \Rightarrow y' = u + xu', \; y'' = 2u' + xu''$ olup denklemde yerlerine yazılıp düzenleme yapılırsa $x^3 u'' = x^2 \quad \Rightarrow xu'' = 1$ elde edilir.

8- Verilen denklemin genel çözümü hangisidir?

$y''' - y' = 1 + 3e^{2x}$

A) $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - 1 + \frac{x}{2} e^{2x}$

B) $y = e^x (c_1 + c_2 x) + c_3 e^{-x} - x + \frac{1}{2} e^{2x}$

C) $y = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x} - x + \frac{1}{2} e^{2x}$

D) $y=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{-x}-x+\frac{1}{4}e^{2x}$

E) $y=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{-x}-x+\frac{x}{2}e^{2x}$

Cevap C- $\lambda^3-\lambda=0 \Rightarrow \lambda\left(\lambda^2-1\right)=0 \Rightarrow \lambda\left(\lambda-1\right)\left(\lambda+1\right)=0 \Rightarrow y_h=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{-x}$ olur. Özel çözüm belirsiz katsayılar yöntemi ile $y_ö=A+Be^{2x}$ olarak aranır fakat 1 fonksiyonu homojende de var olduğu için $y_ö=Ax+Be^{2x}$ olarak aranmalıdır veya ters operatör yöntemi ile

$$y_ö=\frac{1}{D^3-D}\left(1+3e^{2x}\right)=\frac{1}{D(D^2-1)}e^{0x}+3\frac{1}{D(D^2-1)}e^{2x}=-\frac{1}{D}1+3\frac{1}{2.3}e^{2x}=-x+\frac{1}{2}e^{2x}$$ olarak bulunur.

Buna göre de genel çözüm $y=y_h+y_ö$ olur.

9- Verilen denkleme yanındaki dönüşüm uygulandıktan sonra elde edilen sabit katsayılı denklem hangisidir?

$x^2y''-4xy'+4y=x^2, \quad x=e^t$ *dönüşümü*

A) $y''+5y'-y=e^{2t}$

B) $y''-5y'+4y=t^2$

C) $y''-4y'+5y=e^{2t}$

D) $y''-5y'+4y=e^{2t}$

E) $y''-5y'-4y=2e^{t}$

Cevap D- Denklem Cauchy-Euler denklemidir, $x^2y''=D_t\left(D_t-1\right)y, \quad xy'=D_ty$ olup denklemde yazılırsalar $D_t\left(D_t-1\right)y-4D_ty+4y=e^{2t} \Rightarrow (D_t^2-5D_t+4)y=e^{2t} \Rightarrow y''-5y'+4y=e^{2t}$ sabit katsayılı denklem bulunur.

10- Aşağıdakilerden hangisi bir temel çözüm kümesi oluşturmaz?

A) $\left\{e^{x}, e^{2x}, 2e^{x}\right\}$

B) $\left\{1, x\right\}$

C) $\left\{1, 2x, x^2\right\}$

D) $\left\{e^{x}, e^{-x}\right\}$

E) $\left\{\sin x, \cos x\right\}$

Cevap A e^{x} *ile* $2e^{x}$ lineer bağımlı olduğundan temel çözüm kümesi olmaz, diğerleri lineer bağımsızdır veya herbiri için $W\left(x\right)$ in 0 olup olmadığı kontrol edilir. $W\left(x\right)\neq 0$ ise fonksiyonlar lineer bağımsız olup temel çözüm kümesi oluşturur.

Dr. Öğrt. Üyesi Fatma HIRA